

POKUS

- Zaznamenejte kmitání ve fázi a určete dobu T_+
- Zaznamenejte kmitání ve fázi a určete dobu T_-
- Zaznamenejte složené kmitání a určete dobu kmitání T a dobu kyvu T_Δ
- Porovnejte hodnoty obdržené z výpočtů pro doby T_+ a T_- .

ÚKOL

Zaznamenejte a určete kmitání dvou stejných spojených kyvadel.

SHRNUTÍ

Kmitání dvou stejných spojených kyvadel je odlišeno dobou kmitání a dobou kyvu. Doba kyvu je interval mezi dvěma body v určitém čase, kdy se kyvadlo houpe v minimálním rozsahu. Obě hodnoty mohou být spočítány z přirozené doby kmitů složených kyvadel, kde kmity jsou ve fázi a mimo fázi.

POŽADOVANÉ PŘÍSLUŠENSTVÍ

2	Kyvadlové tyče s úhlovým snímačem (230 V, 50 / 60 Hz)	5401.U8404275230
1	Spirálová pružina 3,0 N / m	5401.U15027
2	Stolní svorky	5401.U13260
2	Nerezové tyče 1 000 mm	5401.U15004
4	Svorky	5401.U13255
1	Nerezová tyč 470 mm	5401.U15002
1	3B NETlog™ (230 V, 50 / 60 Hz)	5401.U11300230
1	3B NETlab™	5401.U11310

ZÁKLADNÍ PRINCIPY

Pro kmitání složených kyvadel je energie kmitání převedena z jednoho kyvadla na druhé a naopak. Jestliže jsou obě kyvadla stejná a kmitání je zahájeno tak, že jedno kyvadlo je nejprve v klidu a druhé se houpe, všechna energie je převedena do celého kyvadla. To znamená, že jedno kyvadlo bude vždy v klidu, zatímco druhé se bude houpat v maximálním rozsahu. Čas mezi dvěma takovými událostmi, kdy je jedno kyvadlo v klidu, nebo více obecně, čas mezi jakýmkoliv dvěma případy minimálního rozsahu je označován jako doba kyvu T_Δ .

Kmitání dvou stejných kyvadel může být považováno za složení dvou přirozených kmitů. Tyto přirozené kmity můžou být pozorovány, když jsou obě kyvadla ve fázi nebo mimo fázi. V prvním případě, obě kyvadla vibrují frekvencí, kterou by vibrovala, kdyby nebyl přítomen efekt zdvojení a nepůsobil by na kyvadlo. Ve druhém případě, efekt skládání je v maximální a původní frekvenci větší. Všechna další kmitání mohou být popsána skládáním těchto dvou přirozených kmitání.

Rovnice pohybu pro kyvadla je dána takto:

$$(1) \quad L \cdot \psi_1 + g \cdot \psi_1 + k \cdot (\psi_1 - \psi_2) = 0$$



$$L \cdot \psi_2 + g \cdot \psi_2 + k \cdot (\psi_2 - \psi_1) = 0$$

g : gravitační zrychlení, L : délka kyvadla, k : vazbová konstanta

Pro pohyby $\psi_- = \psi_1 - \psi_2$ a $\psi_+ = \psi_1 + \psi_2$ (původně vybráno libovolně) rovnice pohybu je následující:

$$(2) \quad L \cdot \psi_+ + g \cdot \psi_+ = 0$$

$$L \cdot \psi_- + (g + 2k) \cdot \psi_- = 0$$

Rozdělením

$$(3) \quad \psi_+ = a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t)$$

$$\psi_- = a_- \cdot \cos(\omega_- t) + b_- \cdot \sin(\omega_- t)$$

vznikají úhlové frekvence,

$$(4) \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}}$$

kteří odpovídají přirozeným frekvencím pro pohyb ve fázi nebo mimo fázi ($\psi_+ = 0$ pro pohyb mimo fázi a ψ_- pro pohyb mimo fázi).

Vychýlení kyvadel může být spočítáno ze součtu nebo rozdílu dvou pohybů vedoucích k rozdělení.

$$(5) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \cdot (a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t) + a_- \cdot \cos(\omega_- t) + b_- \cdot \sin(\omega_- t))$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \cdot (a_+ \cdot \cos(\omega_+ t) + b_+ \cdot \sin(\omega_+ t) - a_- \cdot \cos(\omega_- t) + b_- \cdot \sin(\omega_- t))$$

Proměnné a_+ , a_- , b_+ a b_- jsou libovolné koeficienty, které mohou být spočítány z výchozích podmínek pro dvě kyvadla v čase $t = 0$.

Nejjednodušší je uvážit následující případ, kdy se kyvadlo 1 pohne v čase 0 z klidové do původní úhlové rychlosti ψ_0 , zatímco kyvadlo 2 zůstává v klidu.

$$(6) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\psi_0}{\psi_+} \cdot \sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\psi_-} \cdot \sin(\omega_- t) \right)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\psi_0}{\psi_+} \cdot \sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\psi_-} \cdot \sin(\omega_- t) \right)$$

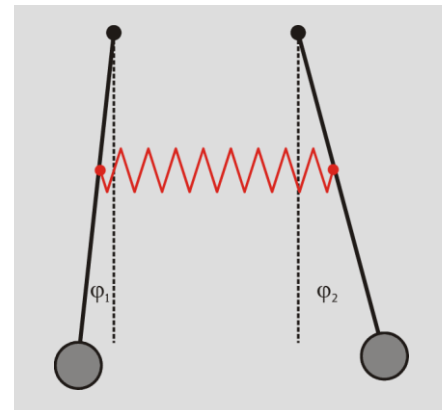
Rychlost obou kyvadel je dána takto:

$$(7) \quad \dot{\psi}_1 = \frac{\psi_0}{2} \cdot (\omega_+ \cos(\omega_+ t) + \omega_- \cos(\omega_- t))$$

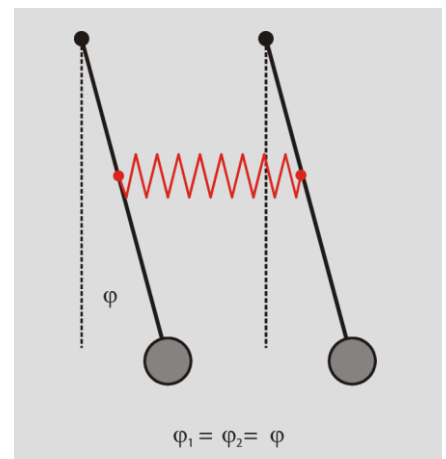
$$\dot{\psi}_2 = \frac{\psi_0}{2} \cdot (\omega_+ \cos(\omega_+ t) - \omega_- \cos(\omega_- t))$$

Rovnice může být přeskupena takto:

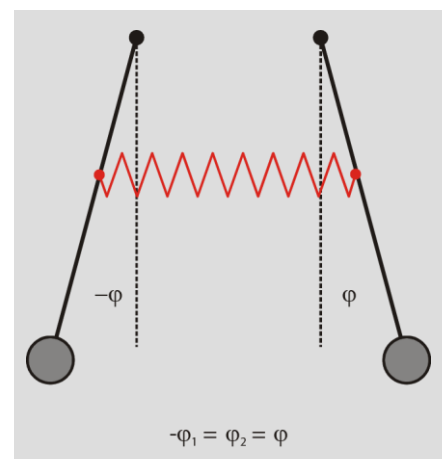
$$(8) \quad \psi_1 = \Psi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) \cdot \cos(\omega_- t)$$



Obrázek 1: Obecné složené kmitání



Obrázek 2: Složené kmitání ve fázi



Obrázek 3: Složené kmitání mimo fázi

$$\psi_1 = \Psi_0 \cdot \sin(\omega_{\Delta}t) \cdot \cos(\omega t)$$

přičemž:

$$(9) \quad \omega_{\Delta} = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$$

Toto odpovídá kmitání obou kyvadel ve stejné úhlové frekvenci ω , kde rychlostní rozsahy Ψ_1 a Ψ_2 jsou modulované v úhlové frekvenci ω_{Δ} :

$$(10) \quad \Psi_1(t) = \Psi_0 \cdot \cos(\omega_{\Delta}t)$$

$$\Psi_2(t) = \Psi_0 \cdot \sin(\omega_{\Delta}t)$$

VYHODNOCENÍ

Rovnice (4) může být použita k výpočtu doby přirozeného kmitání T_+ a T_- pro kmity ve fázi a mimo fázi:

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{a} \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Pro dobu T pro složené kmitání vypadá rovnice takto:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-} \quad \text{tím pádem} \quad T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_- + T_+}$$

Rozsah modulace daný rovnicí (10) je obvykle stanoven členy jeho doby T_{Δ} odpovídající času mezi postupnými body, kdy kyvadlo zůstává v klidu:

$$\frac{2\pi}{2T_{\Delta}} = \omega_{\Delta} = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+} \quad \text{tím pádem} \quad T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$



HELAGO-CZ, s.r.o.

Kladská 1082

500 03 Hradec Králové

Tel.: 495 220 229

Fax: 495 220 154

E-mail: info@helago-cz.cz

<http://www.helago-cz.cz>

